R06 Calculer les intégrales :

$$I=\int_{e}^{e^2}\frac{1}{x\ln x}\,dx \quad \text{et} \quad K=\int_{0}^{\ln 3}\frac{e^{x+1}}{e^x+1}\,dx$$

Corrigé

• **calcul de** $\boldsymbol{I=\int_{e}^{e^2}\frac{1}{x\ln x}\,dx=\int_{e}^{e^2}f(x)\,dx}$

Pour tout $x\in[e;e^2]$, on pose $u(x)=\ln(x)$, alors :

$$f(x)=\frac{1}{x\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Or une primitive de $\frac{u'}{u}$, $u>0$ sur l'intervalle d'étude, est $\ln(u)$ donc en notant F une primitive de f sur $[e;e^2]$ on a $F(x)=\ln(u(x))=\ln(\ln x)$.

Comme f est continue sur $[e;e^2]$, on a :

$$\int_{e}^{e^2}f(x)\,dx=[F(x)]_e^{e^2}=[\ln(\ln x)]_e^{e^2}=\ln(\ln(e^2))-\ln(\ln(e))$$

$$=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)-0=\ln(2)$$

Conclusion : $I=\ln(2)$.

• **calcul de** $\boldsymbol{K=\int_{0}^{\ln 3}\frac{e^{x+1}}{e^x+1}\,dx=\int_{0}^{\ln 3}g(x)dx}$

Pour tout $x\in[0;\ln 3]$, on pose $u(x)=e^x+1$, alors :

$$g(x)=\frac{e^{x+1}}{e^x+1}=\frac{e\times e^x}{e^x+1}=e\times\frac{e^x}{e^x+1}=e\times\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Or, une primitive de $\frac{u'}{u}$, $u>0$ sur l'intervalle d'étude, est $\ln(u)$ donc en notant G une primitive de g sur $[0;\ln 3]$, on a :

$$G(x)=\ln(u(x))=\ln(e^x+1)$$

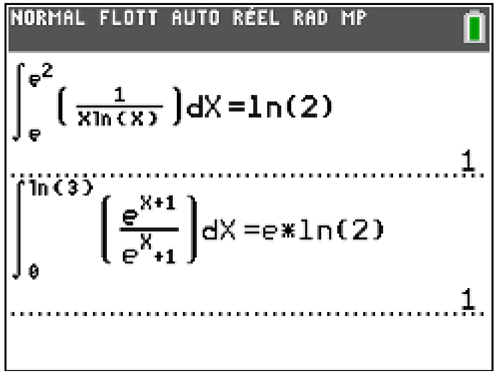
Comme g est continue sur $[0;\ln 3]$:

$$\int_{0}^{\ln 3}\frac{e^{x+1}}{e^x+1}\,dx=[G(x)]_0^{\ln 3}=[e\ln(e^x+1)]_0^{\ln 3}$$

$$=e\ln\left(e^{\ln 3}+1\right)-e\ln(e^0+1)=e\ln(3+1)-e\ln(1+1)$$

$$=e\ln(4)-e\ln(2)=e(\ln(4)-\ln(2))=e\ln\left(\frac{4}{2}\right)=e\ln(2)$$

Conclusion : $\boldsymbol{K=e\ln(2)}$.



utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.